

# USOS DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO. UNA APROXIMACIÓN SEMIÓTICA Y HERMENÉUTICA A LA COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN<sup>1</sup>

## Uses of a mathematical knowledge. A Semiotics and Hermeneutics approach to the understanding of number systems

José Luis González Marí, [gmari@uma.es](mailto:gmari@uma.es)

Antonio Luis Ortiz Villarejo [alortiz@uma.es](mailto:alortiz@uma.es)

Jesús Gallardo Romero, [gallardoromero@telefonica.net](mailto:gallardoromero@telefonica.net)

Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga.

### Resumen

*El Maestro de Educación Primaria debe tener un buen nivel de comprensión de los conocimientos matemáticos que tiene que enseñar. Conscientes de ello, venimos desarrollando una investigación en el nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria acerca de los sistemas de representación numérica. El estudio utiliza y pone a prueba un modelo operativo para la interpretación de la comprensión con el que se ha podido establecer una primera aproximación cognitiva global en alumnos que inician sus estudios universitarios y disponer de indicios razonables sobre los efectos de la nueva asignatura Didáctica de la Aritmética. La última fase del estudio, de la que se presenta aquí un resumen, consiste en una aproximación semiótica y hermenéutica en la que se identifican los errores, las estrategias, los rastros de comprensión, los usos dados al conocimiento y los niveles reales de comprensión de los sujetos de las muestras examinadas.*

**Palabras clave:** Conocimiento del Contenido Matemático, Comprensión del Conocimiento Matemático, Sistemas de Numeración, formación de Maestros de Educación Primaria.

### Abstract

*The Primary Education Teacher must have a good understanding of the mathematical knowledge that has to teach. Aware of this, we are developing an investigation into the new Degree of Teacher training in Elementary Education about systems of numerical representation. The study uses and tests a theoretical model for the interpretation of the understanding with which it has been established a first global cognitive approach at the start of studies and have reasonable evidence on the effects of the new content about Didactics of Arithmetic. The last phase of the study, from which main points are summarized in the present communication, is a semiotic and hermeneutic approach in which errors, strategies, traces of understanding, uses of knowledge and also real understanding levels are identified in the samples examined.*

**Keywords:** Mathematical Content Knowledge, Understanding of Mathematical Knowledge, Numbering Systems, Primary Teachers Training Education

---

<sup>1</sup> La comunicación incluye fragmentos de una parte de la tesis doctoral en elaboración en el Departamento de Didáctica de la Matemática, CCSS y CCEE de la Universidad de Málaga con el título: "Comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria".

José Luis González Marí, Antonio Luis Ortiz Villarejo, Jesús Gallardo Romero. (2014). Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los Sistemas de Numeración. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Pensamiento Numérico y Algebraico*. (pp. inicial-final). Lugar: Salamanca SEIEM.XVIII.

## INTRODUCCIÓN

El estudio que aquí se presenta constituye una parte de una investigación desarrollada sobre la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria, dentro de la línea de trabajo sobre la comprensión del conocimiento matemático y su interpretación operativa (Gallardo y González, 2006a, 2006c, 2007, 2011; Gallardo, González y Quispe, 2007, 2008; Gallardo, González y Quintanilla, 2013).

El marco general del estudio se sustenta en tres orientaciones básicas para la interpretación de la comprensión, cognitiva, semiótica y hermenéutica, y en un modelo general asociado basado en:

- (a) Una concepción operativa sobre la comprensión del conocimiento matemático y su valoración.
- (b) Una concepción relativa y no acumulativa de la comprensión que evoluciona en función de la situación, las condiciones y los factores que intervienen.
- (c) Una concepción analítica del conocimiento matemático basada en las dos estructuras básicas (epistemológica y fenomenológica) y en los diferentes tipos de categorías del conocimiento
- (d) Un método o proceso secuenciado en torno a dos dimensiones:

(d1) *Dimensión fenómeno-epistemológica*, en la que se inicia el estudio con el siguiente procedimiento operativo (Gallardo y González, 2006a):

1. Análisis Didáctico (González, 1998, Gallardo y González, 2006b);
2. Delimitación del conjunto genérico de situaciones;
3. Estructuración fenómeno-epistemológica del conjunto de situaciones. Modelo local
4. Selección de tareas y construcción de instrumentos.
5. Análisis de resultados y primeras conclusiones.

(d2) *Dimensión hermenéutica*, en la que se analiza la información y se completan los resultados y conclusiones mediante lo que denominamos círculo interpretativo o método hermenéutico (Gallardo y González, 2011).

Dentro del marco general descrito, el estudio específico se propone averiguar: (a) el estado relativo de la comprensión que manifiestan, los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan los alumnos futuros maestros del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria (Universidad de Málaga) sobre el sistema de numeración usual (decimal posicional) para los números naturales; (b) establecer consecuencias fundadas para orientar el diseño de la formación inicial de los futuros maestros en la asignatura Didáctica de la Aritmética.

A lo largo del desarrollo de la investigación distinguimos tres niveles de información: cuantitativa de grupo, cualitativa de grupo y cualitativa individual. Los dos primeros se orientan a establecer los resultados muestrales o grupales de la investigación mediante pruebas escritas, mientras que el tercero, información obtenida mediante entrevistas individuales, se dirige a confirmar, rechazar o completar los resultados de los dos primeros niveles. Hablaremos, por tanto, de análisis de la comprensión grupal o muestral para diferenciarlo del análisis de la comprensión a nivel individual.

Hasta la fecha se ha desarrollado la mayor parte de la investigación en dos fases. En la primera se ha configurado una aproximación cognitiva global de carácter muestral caracterizada por la construcción de un modelo local adaptado al conocimiento matemático objeto del estudio y a las características de la población de sujetos y de los estudios que cursan, la construcción de los instrumentos de recogida de datos y la primera fase de los estudios empíricos, consistente en la aplicación de las pruebas escritas a varias muestras de sujetos, el análisis de resultados,

### 3 Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los Sistemas de Numeración

fundamentalmente de tipo cuantitativo, y las consecuencias para la realización de la segunda fase (Ortiz, González y Gallardo, 2011; 2012).

En la segunda fase, de la que se ocupa la presente comunicación, se ha dedicado la atención a una aproximación semiótica y hermenéutica con dos partes diferenciadas. En la primera, a partir de las respuestas a las tareas escritas de las pruebas de la primera fase, se ha realizado un análisis de errores y estrategias y se ha procedido a la identificación de rastros de comprensión y usos del conocimiento en dichas respuestas escritas. En particular, se ha profundizado en la información muestral sobre el fenómeno, se han registrado algunas incidencias especiales individuales y se ha obtenido información sobre los siguientes campos: tipos de respuesta, significados, estrategias utilizadas, errores cometidos, usos del conocimiento, rastros de comprensión en dichos usos, tipos y niveles de comprensión grupal y características generales de la comprensión en cada caso. En la segunda parte se ha desarrollado un programa de entrevistas individuales semiestructuradas que han servido para confirmar, rechazar o completar puntualmente la información muestral e individual obtenida previamente.

En los apartados que siguen se presenta, por este orden, un breve resumen del marco teórico y metodológico de la aproximación en su doble faceta, muestral e individual, un resumen de los resultados obtenidos mediante el análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a las pruebas escritas, las principales consideraciones teóricas acerca del análisis de las entrevistas individuales y la interpretación de la comprensión a partir de las respuestas de los sujetos y la descripción de un caso que ilustra el procedimiento seguido y el análisis realizado en dichas entrevistas individuales.

#### **ANÁLISIS SEMIÓTICO Y HERMENÉUTICO EN RESPUESTAS ESCRITAS. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO**

En el presente apartado se establecen los principios, fines, términos y métodos que se han utilizado para realizar la primera aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión implícita en las respuestas escritas a las tareas de las pruebas escritas. Después de la descripción de los propósitos del estudio, se introducen nuevas precisiones en torno a la noción de comprensión, se definen los distintos elementos a tener en cuenta para el desarrollo del estudio y se concluye con la metodología utilizada y la presentación de resultados.

##### **Propósito del estudio**

Se trata de establecer mecanismos que permitan conocer con detalle la situación de la comprensión en grupos de sujetos y poder intervenir con cierto fundamento en los procesos formativos correspondientes. En este caso, se examina a fondo la producción escrita de grupos de sujetos desde el punto de vista cognitivo, semiótico y hermenéutico para identificar los aspectos cualitativos comunes así como las singularidades notables. Desde un punto de vista más concreto se pretende:

- 1) Identificar las dificultades y limitaciones que se pueden deducir del examen de las respuestas escritas;
- 2) Delimitar los conocimientos, capacidades y destrezas responsables de los errores cometidos, bien en términos de carencias o limitaciones o bien en términos de conocimientos defectuosos o incompletos;
- 3) Encontrar rastros de comprensión comunes y singulares en las respuestas escritas;
- 4) Conocer los modos de razonamiento y clasificarlos para establecer tipos y estilos;
- 5) Identificar los tipos de usos mayoritarios y minoritarios del conocimiento;
- 6) Confirmar la situación de los individuos de la muestra en términos de niveles de comprensión;
- 7) Caracterizar con mayor precisión los niveles de comprensión y las categorías correspondientes;

8) Confirmar los efectos de la asignatura Didáctica de la Aritmética sobre la comprensión de los sistemas de numeración.

### **Precisiones sobre el concepto de comprensión**

Al hablar de la comprensión que manifiesta o posee un sujeto sobre un conocimiento matemático en un momento determinado nos referimos:

- (1) a la situación o al estado cognitivo, afectivo y ontogenético del sujeto en torno a dicho conocimiento
- (2) que le capacita
- (3) para responder de manera competente
- (4) a tareas cuya resolución matemática se manifiesta por medio de
- (5) respuestas, errores y estrategias
- (6) que hacen posible la identificación de rastros de comprensión y
- (7) usos registrables
- (8) e interpretables del conocimiento matemático.

Veamos con más detalle a lo que nos referimos con cada uno de los términos que se incluyen en la aproximación anterior.

(1) La situación o el estado del sujeto se refiere a los aspectos conceptuales (esquemas, conceptos, relaciones conceptuales, etc.), procedimentales o instrumentales (técnicas, destrezas, etc.) y afectivos y actitudinales (valores, emociones, etc.) así como a sus interrelaciones.

(2) La capacidad de respuesta se puede considerar como un tipo de potencialidad de actuación competente basada en el estado de los conocimientos, habilidades y destrezas del sujeto; es la posibilidad de que el sujeto actúe competentemente en una situación adecuada que requiera del uso de un conocimiento matemático. Esta capacidad de respuesta es la que se trata de “medir” con tareas específicas y mediante las categorías, niveles y tipos de análisis establecidos en el modelo local de comprensión construido a partir de las características epistemológicas y fenomenológicas del conocimiento matemático; en nuestro caso, el modelo que se construye y se describe detalladamente en el capítulo 4 de la memoria.

(3) Los niveles de comprensión hacen referencia a los diferentes grados de evolución de las capacidades mencionadas en el apartado anterior. En el estudio vamos a considerar los siguientes niveles: Reproducción / técnico, Análisis, Síntesis, Formal

(4) Las tareas que ponen a prueba la capacidad de respuesta del sujeto y, como consecuencia, el nivel o el estado de su comprensión, son diversas según:

- el escenario en el que se produce la interacción sujeto-tarea;
- la finalidad / intencionalidad de la interacción;
- el nivel establecido en el modelo en función de su contenido y dificultad.

Una tarea de un nivel puede registrar la comprensión hasta ese nivel, es decir, en ese nivel de máxima dificultad de la tarea o en niveles anteriores. Las pruebas se han construido mediante tareas correspondientes a los distintos niveles como niveles de máxima dificultad. Las tareas serán exclusivas si sólo se pueden resolver empleando el conocimiento y las relaciones del nivel al que corresponda. En otros casos, las que se denominan tareas compartidas o no exclusivas, se podrán resolver con conocimientos e instrumentos de distintos niveles de comprensión.

- el tipo de respuesta.

## 5 Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los Sistemas de Numeración

(5) Las respuestas se pueden analizar en función de que sean directas o indirectas, observables o no observables, escritas o verbales, simples o elaboradas, en blanco o no, correctas e incorrectas, etc.

(6) El análisis de las respuestas a las distintas tareas permite identificar y registrar dos tipos de resultados elaborados observables: errores, que notaremos con la letra E, y estrategias, que notaremos con la letra A; en un apartado posterior se tratan extensamente ambos tipos de respuesta;

(7) El análisis de las respuestas, los errores y las estrategias permite identificar *rastros* y *niveles* de comprensión y *usos* del conocimiento matemático que hacen referencia a los tipos de contenido y a los grados de efectividad y oportunidad de las respuestas, entre otros aspectos. Vienen determinados por los niveles del modelo (3), las tareas (4), los tipos de respuesta (5) y los errores y las estrategias detectadas (6).

(8) Las respuestas de los sujetos a las tareas pueden ser interpretables desde los siguientes puntos de vista:

a) cognitivo general (tendencias, respuesta simple observable, niveles; comprensión macroscópica de grupo, limitaciones evidentes),

b) semiótico (análisis semántico y sintáctico de las respuestas, estrategias y errores, significados, destrezas, estilos);

c) hermenéutico (usos, rastros, acuerdos, convergencias y divergencias, etc.).

La interpretación de las respuestas es, por tanto, compleja. Sin embargo, la realización correcta de las tareas en cada caso se puede interpretar teniendo en cuenta los cruces de las categorías epistemológicas y fenomenológicas que aparecen en las tablas 1 y 2.

### **Los errores y las estrategias en las respuestas escritas**

Los errores constituyen usos del conocimiento que dan como resultado respuestas incorrectas a la tarea. Las estrategias, por el contrario, tienen que ver con los procedimientos, tipos de razonamiento, estilos de resolución o métodos que emplea el sujeto para resolver correctamente la tarea

Los errores ponen de manifiesto las posibles limitaciones y dificultades (posibles rastros negativos de comprensión) o los conocimientos, capacidades y destrezas que tiene realmente el sujeto (rastros positivos de comprensión). En ambos casos, los errores serán interpretados, siempre que sea posible, en términos positivos como usos dados al conocimiento en alguna de las dos circunstancias siguientes:

a) un uso inadecuado / defectuoso / incorrecto de un conocimiento pertinente para resolver una situación; en estos casos se puede hablar de intento de uso de un conocimiento y en general no es posible asegurar nada sobre la comprensión del sujeto, que puede situarse en cualquiera de los niveles anteriores al que se corresponde con la situación analizada;

b) un uso correcto / adecuado de un conocimiento que es inadecuado / no pertinente para resolver una situación; en estos casos es posible identificar rastros de comprensión y utilizarlos para inferir alguna información acerca de la comprensión del sujeto;

En resumen, los errores son el resultado de un uso inadecuado del conocimiento o de la utilización de un conocimiento inadecuado y se pueden deber a influencias de situaciones cognitivas o a interferencias y relaciones de facetas previas. Su interpretación en términos de comprensión no siempre puede ser directa, siendo necesario utilizar un abanico de posibilidades para llegar a conclusiones plausibles. Para codificarlos utilizaremos la letra E seguidas de la letras correspondientes en primer lugar al nivel epistemológico (T = técnico, A = analítico, S = sintético)

y en segundo a la categoría fenomenológica (e = estructurar/organizar, r = representar/traducir, c = cuantificar/contar, o = ordenar/comparar y op = operar/algorithm) (ver Tabla 1)

Las estrategias constituyen procedimientos adecuados para resolver una situación. Son el resultado de un uso adecuado / correcto del conocimiento pertinente para resolver la situación y constituyen testigos de la comprensión y los tipos de pensamiento en juego por medio de piezas de información incluidas en las respuestas escritas a las que llamamos rastros de comprensión. Estos rastros de comprensión son indicadores de grados de dominio o de la calidad de la comprensión, a diferencia de los errores, que pueden indicar interferencias, predominio de estados inferiores al que corresponde a la resolución correcta o una situación inferior de la comprensión y dominio del conocimiento que el que corresponde a la tarea analizada. En algunos casos los errores también pueden proporcionar información sobre rastros de comprensión y usos del conocimiento.

Para codificar las estrategias correctas utilizaremos registros semejantes a los utilizados para los errores; así, utilizaremos la letra A seguidas de la letras correspondientes en primer lugar al nivel epistemológico (T = técnico, A = analítico, S = sintético) y en segundo a la categoría fenomenológica (e = estructurar/organizar, r = representar/traducir, c = cuantificar/contar, o = ordenar/comparar y op = operar/algorithm) (ver Tabla 2)

*Tabla 1.- Notación y distribución de los tipos de estrategias en relación con las categorías del modelo de comprensión*

		CATEGORÍAS FENOMENOLÓGICAS				
		ESTRUCTURAR ORGANIZAR	REPRESENTAR TRADUCIR	CUANTIFICAR CONTAR	COMPARAR ORDENAR	COMBINAR OPERAR Algoritmos
CATEGORÍAS EPISTEMOLÓGICAS	TÉCNICA O REPRODUCCIÓN	<b>ATe</b>	<b>ATr</b>	<b>ATc</b>	<b>ATo</b>	<b>ATop</b>
	ANÁLISIS	<b>AAe</b>	<b>AAr</b>	<b>AAc</b>	<b>AAo</b>	<b>AAop</b>
	SÍNTESIS	<b>ASe</b>	<b>ASr</b>	<b>ASc</b>	<b>ASo</b>	<b>ASop</b>

*Tabla 2.- Notación y distribución de los tipos de errores en relación con las categorías del modelo de comprensión*

		CATEGORÍAS FENOMENOLÓGICAS				
		ESTRUCTURAR ORGANIZAR	REPRESENTAR TRADUCIR	CUANTIFICAR CONTAR	COMPARAR ORDENAR	COMBINAR OPERAR Algoritmos
CATEGORÍAS EPISTEMOLÓGICAS	TÉCNICA O REPRODUCCIÓN	<b>ETe</b>	<b>ETr</b>	<b>ETc</b>	<b>ETo</b>	<b>ETop</b>
	ANÁLISIS	<b>E Ae</b>	<b>E Ar</b>	<b>E Ac</b>	<b>E Ao</b>	<b>E Aop</b>
	SÍNTESIS	<b>E Se</b>	<b>E Sr</b>	<b>E Sc</b>	<b>E So</b>	<b>E Sop</b>

## 7 Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los Sistemas de Numeración

### Metodología y presentación de resultados

Básicamente se trata de examinar directamente las respuestas escritas para identificar los errores y las estrategias mayoritarias, los usos dados al conocimiento sobre el campo estudiado y los rastros de comprensión encontrados. La culminación del análisis que se expone en los apartados que siguen consiste en el resumen de los aspectos fundamentales detectados en cada una de las categorías que se indican en la tabla 3.

Tabla 3.- Análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a las pruebas escritas: Tabla de resultados

Prueba	Tarea	Nivel tarea	Respuestas	Error	Estrategia	Rastros de comprensión	Usos del conocimiento	Porcentajes

El estudio se desarrolla en el siguiente orden: análisis de respuestas a las tareas de las pruebas 1 y 2, análisis a las respuestas a las tareas de la prueba 3 y a las diferencias con las pruebas 1 y 2 y resultados y conclusiones.

### RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE RESPUESTAS ESCRITAS A LAS PRUEBAS PCN1, PCN2 Y PCN3

Los resultados obtenidos en el análisis de las respuestas a las tareas de las pruebas escritas son los siguientes:

#### Nivel técnico o de reproducción, pruebas PCN1 y PCN2

Las características del modelo utilizado permiten asegurar que la mayoría de los sujetos hacen un uso técnico o de reproducción de los sistemas de numeración, habiendo respuestas que indican limitaciones para asegurar el dominio completo de este nivel básico en la comprensión del conocimiento analizado. Únicamente se ha observado cierta inseguridad en el dominio y comprensión del sistema verbal y una mayor confianza en el sistema cifrado.

#### Nivel de Análisis, pruebas PCN1 y PCN2

##### *Subnivel de análisis estructural*

En el subnivel de análisis estructural se observan errores que podemos categorizar como:

- Errores de comprensión analítica de representación o de traducción (tareas 7 y 9):
  - Traducción (EAr.1 y EAr.2) cometidos respectivamente por el 50% y el 14 % de los sujetos, de los que podemos decir que como máximo hacen un uso técnico del sistema de numeración.
- Errores de comprensión analítica estructural (tareas 8, 10 y 11):
  - Unidades y relaciones entre ellas (EAe.1 (76%), EAe.2 y EAe.3 (25%)), que indican un uso técnico mayoritario

##### *Subnivel de análisis funcional*

En el subnivel de análisis funcional o de aplicación funcional de los sistemas de numeración en los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales:

- Errores de comprensión analítica funcional en las tareas 13, 14 y 15 de las pruebas 1 y 2:
  - EAop.1 (48,4%): “aplicación mecánica del algoritmo”
  - EAop.2 (menor 5%): “decenas en todas las llevadas”
  - EAop.3 (menor 5%): “transferencia de decenas minuendo-sustraendo”;
  - EAop.4 (menor 5%): “aceptación acrítica del mecanismo de las llevadas”;
  - En todos los casos se identifica un uso técnico del sistema de numeración.

○ Estrategias de análisis funcional:

- AAop.1 (10,5%): identificación de la propiedad distributiva. Rastro de comprensión y uso analítico funcional + indicios de comprensión formal;
- AAop.2 (menos 5%): “la multiplicación por decenas da decenas”. Uso analítico funcional

La tabla 4 sintetiza los resultados obtenidos en este bloque del estudio.

Tabla 4.- Análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a las pruebas escritas PCN1 y PCN2: Tabla de resultados del nivel de análisis.

Prueba	Tareas	Nivel tarea	Error	Estrategia	Rastros de comprensión	Usos del conocimiento	Porcentajes
1 y 2	7 y 9	Análisis representación /traducción	EAr.1		-	Técnico/repr.	50%
			EAr.2		-	Técnico/repr.	14%
	8,10, 11	Análisis estructura	E Ae.1			Técnico/repr.	76%
			E Ae.2			Técnico/repr.	
			E Ae.3			Técnico/repr.	25%
	13, 14 y 15	Análisis funcional	EAop.1			Técnico/repr.	48,4%
			EAop.2			Técnico/repr.	Menor 5%
			EAop.3			Técnico/repr.	Menor 5%
			EAop.4			Técnico/repr.	Menor 5%
				AAop.1	Analítica funcional + formal	Analítico funcional	10,5%
				AAop.2	Analítica funcional	Analítico funcional	Menor 5%

### Nivel de Síntesis, pruebas PCN1 y PCN2

En la progresión teórica desde el nivel de Análisis Funcional al nivel Formal encontramos cuatro bloques de tipos de respuestas y tipos de tareas y un estado especial entre el 3º y el 4º bloques que son dignos de estudio, establecen una cierta progresión en el sentido de menor a mayor complejidad y configuran el nivel que hemos denominado de Síntesis, de comprensión sintética o de generalización de los aspectos estructurales y funcionales de los sistemas de numeración:

- Síntesis I o estructural
- Transición entre la Síntesis estructural y la Síntesis Funcional
- Progresión desde el Análisis Funcional a la Síntesis Funcional
- Síntesis II o Funcional
- Frontera entre el nivel de Síntesis y el nivel Formal

#### *Subnivel de Síntesis estructural y transición hacia la Síntesis Funcional*

En el subnivel de síntesis *estructural* y en el de tránsito entre el nivel de síntesis estructural y el de síntesis funcional se observan errores registrados en las respuestas a las tareas 17 y 19 y que hemos categorizado como:

- Errores de comprensión sintética estructural (intentos fallidos de uso sintético estructural del conocimiento):
  - ESc.1 (35,8% (17); 8,4% (19)) (repetir órdenes);
  - ESc.2 (menor 5%) (uso agrupamientos gráficos sin operar);
  - ESc.3 (9%)) (no tener en cuenta la base y contar en base 10)

Las estrategias se distribuyen en estos dos primeros subniveles de la siguiente forma:

- Estrategias de síntesis estructural (tarea 16):
  - ASr.1 (57,4%): “aplicación del desarrollo polinómico”. Uso analítico estructural del conocimiento.



## 9 Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los Sistemas de Numeración

- ASr.2 (7,1%): “aplicación directa de la estructura y propiedades del sistema”. Uso sintético estructural del conocimiento.
- Estrategias de transición entre el nivel de síntesis estructural y el nivel de síntesis funcional (tareas de síntesis estructural 17 y 19):
  - ASr.1 (13,7-27,1%): “agrupamientos sucesivos”. Uso sintético estructural del conocimiento
  - ASr.2 (11,6-13%): “operar”. Uso sintético estructural del conocimiento
  - ASr.3 (5-13%): “agrupar y operar”. Uso sintético estructural del conocimiento.

### **Subnivel de Síntesis Funcional**

En el subnivel de síntesis *funcional* o de generalización de la aplicación funcional de los sistemas de numeración en los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales en bases distintas a la usual se han identificado los siguientes tipos de errores en las tareas 18, 20, 21, 22 y 23 de ambas pruebas:

- Errores de comprensión sintético estructural (intentos fallidos de uso sintético estructural del conocimiento):
  - ESr.3 (5-15%) “transformaciones erróneas entre bases”
- Errores de comprensión sintética funcional (intentos fallidos de uso sintético funcional del conocimiento):
  - ESop.5 (20-45,3%): “operar sin tener en cuenta la base”
  - ESop.6, 7 (menor 5%): “cambiar minuyendo por sustraendo”; “error en transferencia de órdenes”
  - En todos los casos se identifica un uso técnico o analítico del sistema de numeración.

Las estrategias siguen las siguientes pautas:

- Estrategias en tareas de síntesis funcional (tareas 18, 20, 21, 22 y 23):
  - ASop.4 (20-25%): “transformar a base 10 y operar”. Uso analítico funcional del conocimiento;
  - ASop.5 y ASop.6 (menor 5%): “operar en base y transformar a base 10”. Uso analítico funcional – síntesis estructural (posición intermedia entre análisis y síntesis con incapacidad para generalizar);
  - ASop.7 (menor 5%): “operar en base con transferencias correctas”. Uso síntesis funcional del conocimiento;

La Tabla 5 sintetiza los resultados obtenidos en este bloque del estudio.

Tabla 5.- Análisis semiótico y hermenéutico de las respuestas a las pruebas escritas: Tabla de resultados del nivel de Síntesis (PC1 y PCN2)

Usos de la síntesis (PO1 y PO2)									
Pruebas 1, 2 bloq	Tareas	Nivel tarea	Cat. Fenom	Error	Estrat	Rastros de comprensión	Usos del conocimiento	porcentajes	
Síntesis I Estructural	16	Síntesis estructural	Rep/Trad		ASr1	Aplicación desarrollo polinómico	Análisis estructural	57,4	
	ASr2				Aplicación directa	Síntesis estructural	7,1		
	17			Contar		ASc.1	Agrupamientos sucesivos	Síntesis estruct	Tar.1 27,1
Transición Síntesis Estructural Síntesis Función.	19	Síntesis funcional			ASc.2 (arit. I)	Operar	13		11,6
					ASc.3 (arit.II)	Agrupar y operar	13		≤ 5
			ESc1				Intentos fallidos uso anal. Estruc	35,8	8,4
			ESc2				Intentos fallidos uso anal. Estruc	≤ 5	≤ 5
			ESc3				Intentos fallidos	≤ 5	9

				ESc4			uso anal. Estruct.		
							Sin valoración	≤ 5	≤ 5
Evolución estrategias análisis funcional – síntesis funcional (C-134)	18.1				ASop4	Analítica Incapacidad para generalizar	Análisis funcional	20-25	
					ASop5			≤ 5	
					ASop6		Síntesis estructural (transición Análisis/Síntesis)	≤ 5	
Síntesis funcional	18.2				ASop7	Capacidad para generalizar	Síntesis funcional	≤ 5	
				ESop5				20-25	
				ESr3				5-15	
	20.1				ASop4	Analítica Incapacidad para generalizar	Análisis funcional	5-8	
					ASop5		Síntesis estructural (transición Análisis/Síntesis)	≤ 1	
					ASop6			≤ 1	
					ASop7	Capacidad para generalizar	Síntesis funcional	≤ 1	
				ESop5				35-40	
				ESr3				5-12	
				ESop7				≤ 1	
	22				ASop4	Analítica Incapacidad para generalizar	Análisis funcional	4-6	
					ASop7	Capacidad para generalizar	Síntesis funcional	≤ 2	
				ESop5				25-30	
				ESr3				5-10	
Síntesis II Frontera Síntesis / Formal	24.1				ASop4	Analítica Incapacidad para generalizar	Análisis funcional	≤ 1	
					ASop6			1-5	
	24.2			Diversos errores					

### Nivel técnico o de reproducción, prueba PCN3

Los porcentajes de respuestas correctas en la prueba 3 son cercanos al 100%.

### Nivel de Análisis, prueba PCN3 y su comparación con las pruebas PCN1 y PCN2

#### Subnivel Análisis I

En comparación con las dos primeras pruebas el porcentaje de respuestas correctas ha registrado un aumento sustancial en las actividades de este subnivel, tareas 8, 9 y 11. Las diferencias son significativas en todos los casos, tanto en lo que se refiere a errores cometidos, como a respuestas correctas, como a estrategias utilizadas.

#### Subnivel Análisis II

En general se aprecia un considerable aumento de respuestas correctas en las tareas de este grupo y una reducción de los errores identificados en las dos pruebas anteriores manteniéndose su presencia.

### Nivel de Síntesis, prueba PCN3

Aumentan significativamente las respuestas correctas, se reducen notablemente los errores cometidos y las estrategias utilizadas se modifican sustancialmente. Se abandonan las estrategias que suponían transformar las expresiones y operar en nuestro sistema, para realizar las acciones en estas representaciones no decimales. A modo de ejemplo se incluyen las dos tablas comparativas 6 y 7.

## 11 Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los Sistemas de Numeración

*Tabla 6. Errores cometidos en los ítems 18.1 (PCN1, PCN2 y PCN3)*

Errores	PCN1	PCN2	PCN3
ESop.5	24,5%	20%	9%
ESr.3	10,3%	13,7%	-
Otros	7,6%	5,4	-
Total	42,4%	39,1	9%

*Tabla 7. Estrategias utilizadas en los ítems 18.2 (PCN1, PCN2 y PCN3)*

Estrategias	PCN1	PCN2	PCN3
ASop.4	21,3%	20%	-
ASop.5	1,3%	-	-
ASop.6	-	-	-
ASop.7	-	1,1 %	38,46
Total	22,6%	21,1%	38,46

Por último, se ha realizado un análisis de los errores y las estrategias correspondientes a los distintos bloques de tareas que configuran el perfil de comprensión de las muestras utilizadas con respecto al conocimiento matemático estudiado.

### ANÁLISIS DE ENTREVISTAS INDIVIDUALES

#### Finalidad del estudio

La investigación pretende: “Averiguar la comprensión que manifiestan, los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan los estudiantes del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria sobre los sistemas de numeración en general y, en particular, sobre el sistema de numeración usual para los números naturales, con el propósito de extraer consecuencias fundadas para orientar el diseño de esa parte específica de la formación inicial”. Para alcanzar esta meta las entrevistas vienen a completar el estudio en los siguientes aspectos:

- Reconocer los usos detectados en los estudios anteriores en forma de errores y estrategias.
- Observar la forma en que construyen las respuestas y valorar los silencios, las dudas y los titubeos, las rectificaciones, las risas, etc., que se producen en su desarrollo.
- Reconocer, si es posible, perfiles identificados en los estudios cuantitativos globales, en los que, por ejemplo, la mayoría de los alumnos de primer curso presentan características cercanas a niveles de comprensión técnicos o de reproducción.
- Corroborar que el hecho de cursar la asignatura de Didáctica de la Aritmética produce una mejora relativa en la comprensión de los alumnos, sobre todo en los niveles de análisis y síntesis I.
- Precisar algunas respuestas obtenidas en los cuestionarios escritos y valorar la determinación de los errores y estrategias analizadas detectadas en los cuestionarios escritos.
- Confirmar que las SR corresponden a la “no comprensión”, a la imposibilidad de su resolución y no a la dejadez, cansancio, etc., que pudieran estar presente en la realización de los cuestionarios aplicados.
- Incluir algunas cuestiones correspondientes al nivel de síntesis II, para los alumnos que respondieron acertadamente a la totalidad del primer y segundo cuestionario.
- Analizar el tipo de respuestas de alumnos y alumnas que poseen “teóricamente” un nivel mayor de formación matemática.

- Llegar a acuerdos sobre sus dificultades, errores de comprensión y necesidades de formación para afrontar con garantías su futuro desarrollo profesional en el ámbito de la educación matemática.
- Validar el modelo local y la prueba de comprensión numérica construida.

### Metodología

Las tareas que componen las entrevistas, que como en el caso de los cuestionarios aplicados, atienden al modelo local desarrollado y constan de las cuatro partes diferenciadas: cuestiones del nivel técnico o de reproducción, cuestiones del nivel de análisis, del nivel de síntesis I y del nivel de síntesis II. Las tareas concretas están recogidas en Ortiz, A. (2014, apartado 5 del anexo III).

Se ha mantenido el mismo protocolo con todos los alumnos. En primer lugar se les ha explicado el objetivo de la investigación y de la propia entrevista. Se proyectaba en la PDI la cuestión a resolver, se leía y aclaraba el contenido de cada cuestión respondiendo a las dudas que pudieran tener y realizando preguntas “aclaratorias” en los casos en que se constatará, después de un tiempo razonable, la no actividad del alumno o que respondieran de forma incorrecta. Se avanzaba por las tareas de la entrevista hasta acabar o comprobar que el propio alumno reconocía su incapacidad para resolver la tarea propuesta.

### Codificación y registro de la información

Para la transcripción de las entrevistas utilizamos códigos para identificar al alumno entrevistado, indicando el curso al que pertenece (1 ó 2) para los alumnos del grado de Primaria y la letra “s” para el caso de los alumnos del master de secundaria. Así registraremos con A1-1º para identificar la entrevista realizada al alumno A1 de primer curso, A3-2º sería la identificación del alumno A3 de 2º curso del grado y A2-s corresponde a la realizada por alumno A2 del master de secundaria.

En cada una de las tareas propuestas, utilizaremos un código para registrar las respuestas de los alumnos que estará compuesta por la letra R y las letras E y E’ para las intervenciones del entrevistador y el director de tesis que participó en algunas de las entrevistas. En cada una de las tareas propuestas enumeramos tanto las preguntas como las respuestas para su identificación y localización. Reflejamos los comentarios de los participantes y entre paréntesis describiremos las acciones que realiza el entrevistado para resolver las tareas. En el apartado 5.1 del anexo V se encuentra la transcripción de las entrevistas realizadas.

### Ejemplos

Se incluyen a continuación dos fragmentos y su análisis correspondiente.

#### **Fragmento 3.** Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma ( $368 + 457$ ).

Fragmento extraído de la resolución de la tarea 7, en la que se le pide que realice una suma de dos sumandos y que justifique las acciones que va realizando.

*R8. Pues lo que he dicho antes, cada cifra ... cada lugar puede tener una cifra, y si no puedo poner 15, bueno de toda la vida, no se dar la explicación pues toda la vida lo hemos hecho así...y supongo yo que cada lugar, cada posición debe tener una cifra... entonces en las unidades, es como si me sobrara uno y se las sumo a las decenas.*

En los resultados parciales obtenidos en el algoritmo de la suma no distingue suficientemente el orden sobre el que actúa y por ello comete el error EAop.2, al considerar unidades y decenas en todas las sumas parciales independientemente del orden implicado; manifiesta un conocimiento técnico del algoritmo al reconocer que hace lo que le han enseñado, sin justificar los procedimientos implícitos en el mismo.

**Fragmento 4.** Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta.

Extraído de la resolución de la tarea 8, en la que se le pide que realice una resta de dos sumandos y que justifique las acciones que va realizando.

*R1. De seis a doce, seis.*

*E2. ¿Por qué dices a doce?*

*R2. Porque no vamos a restarle un número...., claro a dos no le vas a quitar seis.*

*E3. Claro, entonces tu dices a doce, que haces entonces, le sumas...*

*R3. No, de seis a doce o doce menos seis. Pero, me llevo una.*

*E4. Y esa que te llevas, ¿por qué?*

*R4. ( Ríe y pone un uno en las decenas del sustraendo) Eso ya no lo se. ( Se vuelve a reír).*

*E5. Porque así te han dicho que se ponga, ¿no?*

*R5. Si, claro... tres y una cuatro, y de cuatro a seis dos ( escribe un dos en las decenas) y suponemos que hay un cero y de cero a cinco, cinco ( escribe un cinco en las centenas)*

Manifiesta un conocimiento técnico del algoritmo al no justificar el significado de las llevadas, no utilizando la transferencia inversa o los procedimientos de compensación necesarios; reconoce expresamente no saber las razones de los procedimientos implicados (R4) y los aplica sin más por la enseñanza recibida (EAop1).

## CONCLUSIONES

Las entrevistas mejoran sustancialmente la información que se obtiene de los registros escritos obtenidos en los cuestionarios, pues supone la implicación del propio entrevistador en el proceso de resolución y permite hacer emerger rastros de comprensión y el uso del conocimiento matemático que estos dejan entrever, profundizar en respuestas incompletas, alentar la continuación de estrategias desechadas, etc.

La formación matemática con la que se inician los estudios de grado es insuficiente para abordar con garantías el proceso formativo del futuro Maestro de Primaria. la mayoría de los alumnos que inician sus estudios de grado tienen un conocimiento de tipo instrumental, desconocen la organización interna de los sistemas de numeración, no son conscientes de los principios que lo caracterizan ni tampoco de su papel en los algoritmos de las operaciones elementales y por tanto son incapaces de resolver tareas equivalentes en sistemas con agrupamientos distintos.

En las 21 entrevistas realizadas se ha obtenido una tipología de respuestas coincidentes con las obtenidas en las pruebas escritas. En particular:

- De los 9 alumnos entrevistados que no habían cursado la asignatura, 6 presentan un perfil de comprensión técnico coincidente en gran medida con los resultados obtenidos en las pruebas escritas.
- De los 8 alumnos entrevistados que habían cursado la asignatura de Didáctica de la Aritmética, 6 presentan mejoras en la comprensión de las tareas relacionadas con los niveles de análisis y síntesis I, tanto estructural como funcional.

Se ha observado que algunos sujetos han modificado sus estrategias erróneas de las pruebas escritas por estrategias adecuadas en el transcurso de la entrevista, bien de motu propio o bien por las preguntas del propio entrevistador, por sus silencios o por cuestionarles sus propias respuestas.

Se ha comprobado la necesidad de completar los niveles epistemológicos del modelo local. Es posible establecer dentro de cada uno de los niveles establecidos, subniveles que permitan afinar más la categorización empleada en el estudio.

Se ha confirmado la presencia de los errores y las estrategias ya detectados en el análisis de las respuestas escritas a los cuestionarios.

Mientras que ha sido posible que algunos alumnos explicaran el proceso de las llevadas sobre todo en el caso de la adición o de la multiplicación, no se ha conseguido sin embargo modificar las respuestas para el caso de la sustracción y de la colocación de las sumas parciales en el algoritmo de la multiplicación, lo que sin duda supone reconocer el mayor nivel de dificultad del aprendizaje significativo de la multiplicación y la sustracción frente a la adición.

Los alumnos de 2º que han cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética demuestran un conocimiento analítico mayoritario y se aprecia en las respuestas ofrecidas la soltura y claridad con la que justifican los pasos que se dan para resolver los algoritmos de las operaciones elementales y su capacidad para considerar y traducir a nuestro sistema expresiones numéricas no habituales de tipo multiplicativa; lo que nos lleva a concluir que la asignatura de Didáctica de la Aritmética ha conseguido este objetivo, que aunque entendemos mínimo, muestra la diferencia que existe entre estas y sus respuestas a los cuestionarios escritos realizados y a las respuestas ofrecidas por los alumnos de primer curso.

## REFERENCIAS

- Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. La comprensión del algoritmo de multiplicar números naturales*. Tesis Doctoral. Dep.de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2002). Multiplicaciones con cifras desconocidas: problemas para practicar y comprender el algoritmo estándar de la multiplicación. *Epsilon*, 54, 469-478.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2005). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.) *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 197-204). Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006a). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, 26, 2, 10-15.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006b). El Análisis Didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática. En P. Bolea, Mª. J. González y M. Moreno, (Eds.) *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 57-77). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses- Universidad de Zaragoza.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006c). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, 1(1), 21-31.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2007). Fronteras en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática. *Números*, 66.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2011, December). On understanding and interpretation in mathematics: An integrative overview. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 26. Retrieved from <http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome26/index.html>.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2014). El análisis didáctico como método para el tratamiento de los antecedentes bibliográficos en la investigación en Educación Matemática. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.). *El Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Comares
- Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2007). Comprensión del concepto de fracción. Análisis de las interferencias entre significados. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y Mª. T. González (Eds.) *Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de*

15 Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los Sistemas de Numeración

*Investigación en Educación Matemática SEIEM. Comunicaciones de los Grupos de Investigación* (pp. 207-222). Tenerife: CajaCanarias- SEIEM.

Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008). Rastros de comprensión en la acción matemática. La dimensión hermenéutica de un modelo operativo para la interpretación en matemáticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.) *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 283-293). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática- SEIEM.

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática* v.25, núm 2.

González, J. L. (1998). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245-256). Osnabrück, Germany: ERME.

González, J. L. y Gallardo, J. (2014). Análisis didáctico curricular: un procedimiento para fundamentar y realizar el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.). *El Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Comares.

Ortiz, A. L. (1999). *Comprensión del Sistema de Numeración Decimal: un análisis de la coordinación entre los sistemas de representación escrito y hablado*. Memoria de Tercer Ciclo. Programa de Doctorado 1996-1998. Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga.

Ortiz, A. L., González, J. L. y Gallardo, J. (2011). Comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria. *Seminario grupo PNA. XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Ciudad Real.

Salinas M. J. (2003). Comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas en estudiantes de Magisterio. En Castro, E. (Ed.). *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación Matemática* (pp.339-348). Granada: Universidad de Granada.

Salinas M. J. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de Magisterio. En M. Camacho et al. (Eds): *Investigación en Educación Matemática XI*, pp 381-390. SEIEM 2007.

Sánchez, T. (2012). Límite finito de una función en un punto. Fenómenos que organiza. Tesis Doctoral inédita. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.